

Teoretická část - 1.2.2021

1. (a) Definujte monotónní, konvexní a konkávní funkci (2 body).
- (b) Zformulujte a dokažte větu o vztahu druhé derivace a konvexity a konkávy (2, 5 bodu).
- (c) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
 - (i) je-li f konvexní na \mathbb{R} , potom je f monotónní \mathbb{R} ,
 - (ii) je-li f konvexní na \mathbb{R} , potom limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) - f(n)$ existuje,
 - (iii) je-li f konvexní na \mathbb{R} , potom limita $\lim_{x \rightarrow 13^+} f(x)$ existuje,
 - (iv) je-li f konvexní na \mathbb{R} , potom $f'(13)$ existuje,
 - (v) je-li f konvexní na \mathbb{R} , potom $f'_+(13)$ existuje,Vše řádně zdůvodněte (3, 5 bodu).

2. (a) Definujte rozšířenou reálnou osu a okolí $\pm\infty$ (2 body).
- (b) Zformulujte a dokažte větu o výpočtu nevlastních limit (3 body).
- (c) Nechť $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^2 = +\infty$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
- (i) pokud limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ existuje, potom je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$,
- (ii) limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ existuje,
- (iii) limita $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(f(x))$ neexistuje.
- Řádně zdůvodněte. (3 body).

3. (a) Definujte ostré lineární uspořádání, těleso a uspořádané těleso (3 body).
- (b) Zformulujte a dokažte větu o hustotě \mathbb{Q} a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v \mathbb{R} (2 body).
- (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
- (i) těleso \mathbb{Z}_2 lze vybavit uspořádáním tak, aby se z něj stalo uspořádané těleso,
 - (ii) pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $a_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,
 - (iii) pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje rostoucí posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, že $a_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- Řádně zdůvodněte. (3 body).